Numeryczne całkowanie równań ruchu

Równania różniczkowe możemy rozwiązywać numerycznie krok po kroku: obliczenia sprowadzają się do prostej arytmetyki. Ponieważ należy je zwykle wykonywać wiele razy, co nie jest porywającą czynnością, więc najlepiej nadają się do takich celów komputery.

Zasada całkowania numerycznego jest prosta: pochodną funkcji $f'(t)$ dla krótkich czasów Δt zastępujemy ilorazem różnicowym (ilorazem przyrostów):

$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \approx f'(t).$$

Przekształcając to równanie możemy obliczyć wartość funkcji w chwili późniejszej $f(t+\Delta t)$:

$$f(t+\Delta t) \approx f(t) + f'(t)\Delta t \qquad (*)$$

Znając więc wartość funkcji oraz jej pochodną w chwili t możemy znaleźć wartość funkcji w chwili $t+\Delta t$. Jeśli czas Δt jest niewielki, procedura ta powinna być sensowna. Oczywiście nie zawsze wiadomo, jak krótki czas Δt należy wybrać w danym przypadku.

W całkowaniu numerycznym wybieramy jakiś ustalony krok czasowy Δt i obliczamy wartości szukanej funkcji w kolejnych chwilach odległych o Δt. Oczywiście, aby zacząć obliczenia, musimy zadać pewne wartości początkowe w chwili $t=0$.

Przypadek ruchu ciała w polu nieruchomego centrum siły ciężkości jest nieco bardziej skomplikowany, ponieważ w każdym kroku musimy znajdować dwa wektory: wektor położenia $[x, y]$ oraz wektor prędkości $[v_x, v_y]$.

Równania ruchu w postaci wektorowej mają postać:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v(t)}}{dt} = \vec{a}(t) = -\dfrac{GM}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} \\ \dfrac{d\vec{r(t)}}{dt} = \vec{v}(t) \end{cases}$$

Gdy ciało znajduje się w punkcie (x, y) płaszczyzny (centrum siły znajduje się w początku układu współrzędnych), składowe równań ruchu przyjmują postać:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t) = -\dfrac{GMx(t)}{r(t)^3} \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = a_y(t) = -\dfrac{GMy(t)}{r(t)^3} \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = v_x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = v_y(t) \\ r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \end{cases} \qquad (1)$$

Aby rozwiązać numerycznie ten układ równań, należy zadać warunki początkowe w chwili $t = 0$ i do każdego z równań w pochodnych zastosować wzór (*). Znając położenia i prędkości w danej chwili obliczamy położenia i prędkości w chwili późniejszej o Δt.

Okazuje się, że w praktyce, aby uzyskać stabilne rozwiązania należy obliczać położenia i przyspieszenia w chwilach 0, Δt, $2\Delta t \ldots$, natomiast prędkości w chwilach przesuniętych o $1/2\Delta t$. Otrzymujemy więc układ równań służący do numerycznych obliczeń w postaci:

$$\begin{cases} x(t+\Delta t) = x(t) + v_x(t+\Delta t/2)\Delta t \\ y(t+\Delta t) = y(t) + v_y(t+\Delta t/2)\Delta t \\ v_x(t+\Delta t/2) = v_x(t-\Delta t/2) + a_x(t)\Delta t \\ v_y(t+\Delta t/2) = v_y(t-\Delta t/2) + a_y(t)\Delta t \\ a_x(t) = -\dfrac{GMx(t)}{r(t)^3} \\ a_x(t) = -\dfrac{GMx(t)}{r(t)^3} \\ r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \end{cases} \tag{2}$$

Jako warunki początkowe zadajemy wektory położenia i prędkości w chwili początkowej: $x(0)$, $y(0)$, $v_x(0)$ oraz $v_y(0)$. Chcąc skorzystać z układu równań (2) musimy jeszcze wyznaczyć prędkość w chwili $\Delta t/2$:

$$v_x(\Delta t/2) = v_x(0) + a_x(0)\Delta t/2$$

$$v_y(\Delta t/2) = v_y(0) + a_y(0)\Delta t/2$$

Te ostatnie równania oraz równania (2) umieszczone są w arkuszu kalkulacyjnym satelita.xls.