Kształt orbity planety: I prawo Keplera

Pokażemy, że orbitą planety poruszającej się pod działaniem siły ciężkości ze strony Słońca jest krzywa stożkowa, w szczególności elipsa.

Wektor prędkości planety

Dzielimy orbitę planety promieniami wodzącymi tworzącymi niewielkie i jednakowe kąty $\Delta\theta$. Całe rozumowanie ma sens przejścia granicznego: będziemy zakładać, że $\Delta\theta \to 0$

Zgodnie z II prawem Keplera (prawem pól) pole powierzchni ΔS wycinka utworzonego przez dwa sąsiednie promienie wodzące jest proporcjonalne do czasu Δt przebycia danego odcinka orbity: $\Delta S \sim \Delta t$. Pole wycinka ma w przybliżeniu kształt trójkąta o dwóch bokach długości r, wyraża się więc wzorem

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \sin\Delta\theta \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta.$$

Tak więc

$$r^2 \Delta\theta \sim \Delta t.$$

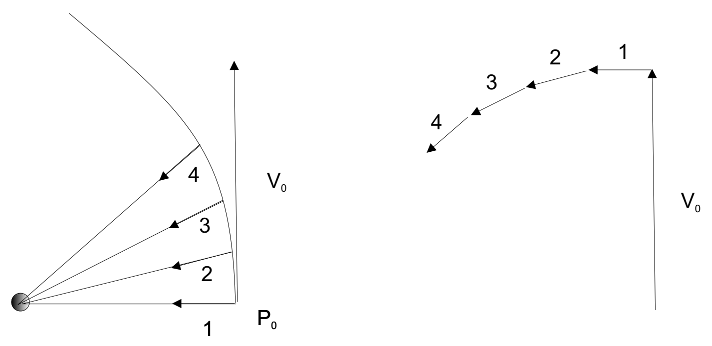
Zmiana wektora pędu pod działaniem przyciągania Słońca jest zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona proporcjonalna do siły $\vec{F}$ i czasu jej działania Δt:

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t.$$

W naszym przypadku siłą jest siła grawitacji, odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości. Zmiana prędkości odpowiadająca kątowi $\Delta\theta$ jest więc niezależna od odległości i skierowana zawsze ku Słońcu:

$$\Delta\vec{v} \sim \left(\frac{1}{r^2} \cdot r^2\right)\frac{\vec{r}}{r}.$$

Sytuację tę przedstawia rysunek poniżej, gdzie kolejnymi numerami oznaczono kolejne $\Delta\vec{v}$, prędkość $\vec{v}_0$ jest prędkością w punkcie najbliższym Słońca - w tzw. peryhelium

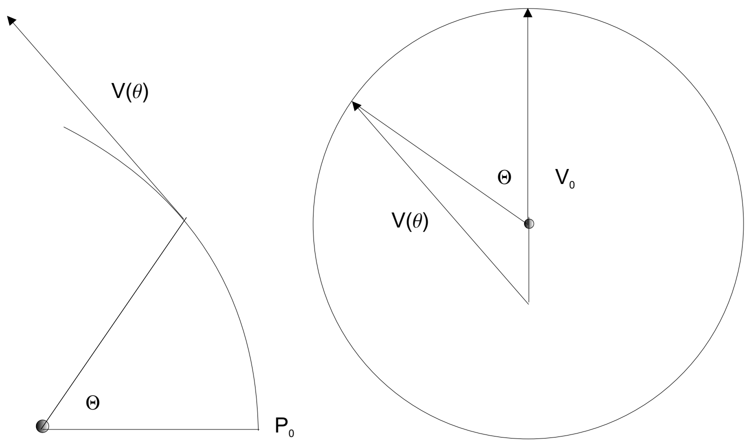


Kolejne wektory $\Delta\vec{v}$ dodają się do początkowej prędkości $\vec{v}_0$, jak pokazuje prawa część rysunku. Mają one jednakową długość i obrócone są o $\Delta\theta$ względem siebie. Jasne jest więc, że koniec wektora prędkości porusza się po wielokącie. Gdy zmniejszamy $\Delta\theta$ wielokąt ten dąży do okręgu. Mamy więc następujące

Twierdzenie 1 *Koniec wektora prędkości planety zatacza łuk okręgu*

Linię zataczaną przez koniec wektora prędkości nazywa się w mechanice hodografem. Możemy więc powiedzieć krótko: **W ruchu keplerowskim hodograf jest łukiem okręgu.**

Sytuację przedstawia poniższy rysunek



Zależnie od wartości $\vec{v}_0$ początek wektora prędkości leży wewnątrz okręgu, na okręgu bądź na zewnątrz okręgu.

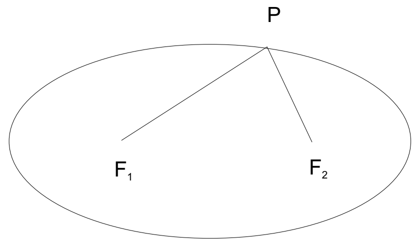
Oczywiście powyższe twierdzenie bardzo łatwo uzyskać na drodze analitycznej podstawiając w równaniach ruchu planety zamiast czasu nową zmienną θ.

Kształt orbity: podejście geometryczne

Można pokazać, że w przypadku gdy początek wektora prędkości leży *wewnątrz* okręgu torem planety jest elipsa. Czysto geometryczny dowód zaproponował R.P. Feynman (D.L. Goodstein, J.R. Goodstein *Zaginiony wykład Feynmana*).

Najpierw definiujemy elipsę: dla każdego punktu elipsy suma jego odległości od dwóch ustalonycxh punktów jest stała. Punkty te nazywamy ogniskami elipsy (nazwa związana jest z faktem, że światło ze źródła umieszczonego w jednym z ognisk odbijane przez zwierciadło o kształcie eliptycznym skupia się w drugim ognisku). Mamy więc z definicji

$$F_1P + F_2P = const$$

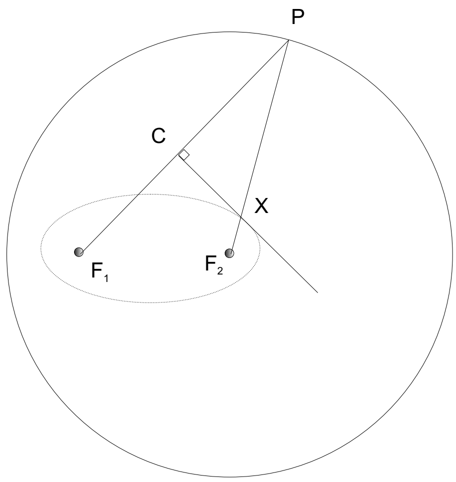


Elipsę można także skonstruować w sposób następujący (patrz rysunek poniżej). Obieramy dwa ogniska elipsy. Następnie wykreślamy okrąg o środku F_2 i promieniu równym długości dużej osi elipsy. Dla dowolnego punktu P na okręgu wykreślamy odcinki F_1P oraz F_2P. W ostatnim kroku konstruujemy symetralną odcinka F_1P. Punkt Xprzecięcia owej symetralnej i promienia F_1P leży na elipsie. Mamy bowiem

$$F_1X + XF_2 = PX + XF_2 = PF_2 = const.$$

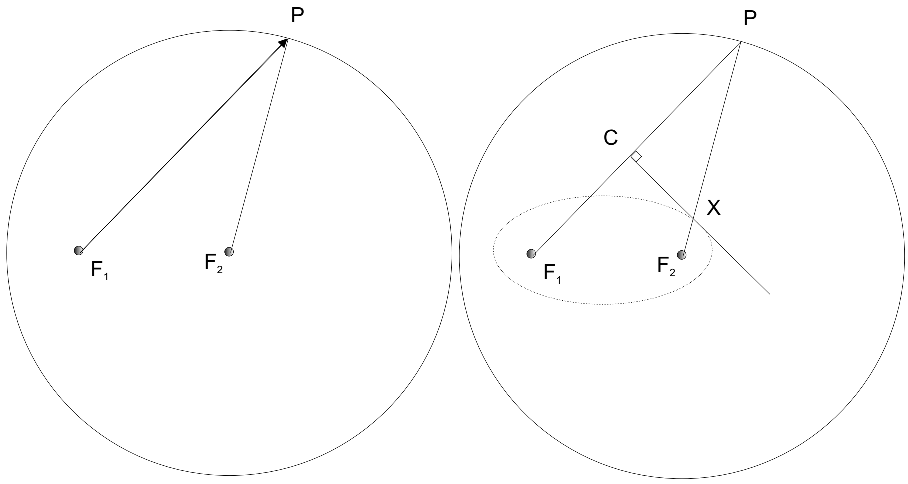
Skorzystaliśmy tu z faktu, że punkt symetralnej jest równoodległy od końców odcinka: $F_1X = PX$.

Powtarzając konstrukcję dla różnych punktów P możemy znaleźć dowolnie dużo punktów elipsy.



Co wiecej łatwo zauważyć, że symetralna z tej konstrukcji jest styczną do elipsy w punkcie X. Każdy bowiem inny punkt tej symetralnej ma większą sumę odległości od ognisk, leży więc na elipsie obejmującej tę dopiero co skonstruowaną.

Możemy teraz przejść do konstrukcji toru planety. Bierzemy w tym celu hodograf prędkości i obracamy go o 90° w prawo (patrz rysunek poniżej, lewa część). F_2P ma teraz kierunek promienia wodzącego planety, F_1P jest *prostopadłe* do kierunku prędkości. Jeśli zastosujemy dopiero co poznaną konstrukcję i narysujemy symetralną odcinka F_1P, to ma ona kierunek wektora prędkości, a więc wektora stycznego do toru. Czyli na każdym promieniu wodzącym budujemy tor o prawidłowym przebiegu stycznej. Oznacza to, że konstrukcja jest torem planety z dokładnością do skali: nic wprawdzie nie wiemy o rozmiarach orbity, lecz jej kształt został ustalony jednoznacznie. A zatem:

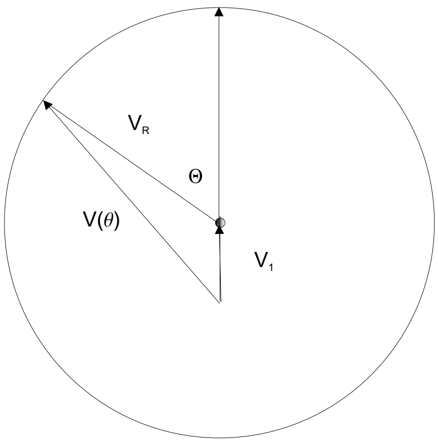


Twierdzenie 2 *Orbita planety jest elipsą, Słońce znajduje się w jednym z jej ognisk.*

Należy pamiętać, że twierdzenie to odpowiada sytuacji, gdy początek wektora prędkości leży wewnątrz okręgu zakreślanego przez jego koniec. Dwie pozostałe możliwości prowadzą do orbity parabolicznej i hiperbolicznej. Najłatwiej wykazać to jednak w sposób analityczny, co zostanie zrobione poniżej.

Kształt orbity: podejście analityczne

Wróćmy raz jeszcze do sytuacji z twierdzenia o hodografie, przedstawia ją poniższy rysunek.



Wektor prędkości planety można przedstawić jako sumę stałego wektora $\vec{v}_1$ oraz wektora w każdej chwili prostopadłego do promienia wodzącego $\vec{v}_R$:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_R.$$

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu planety mamy $|\vec{r} \times \vec{v}| = C$, gdzie C jest pewną stałą. Wstawiając wynik twierdzenia o hodografie otrzymujemy

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r} \times \vec{v}_1 + \vec{r} \times \vec{v}_R| = rv_1 \sin(90^\circ - \theta) + rv_R = r(v_1 \cos\theta + v_R) = C.$$

Obliczając r otrzymujemy

$$r = \frac{\frac{C}{v_R}}{1 + \frac{v_1}{v_R}\cos\theta}.$$

Ostanie równanie ma postać biegunowego równania stożkowej znanego z geometrii analitycznej:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}.$$

Porównując oba równania widzimy, że mimośród stożkowej e jest równy

$$e = \frac{v_1}{v_R}.$$

A zatem $e > 1$ (hiperbola) odpowiada sytuacji, gdy początek wektora prędkości leży na zewnątrz okręgu, parabola $e = 1$ odpowiada sytuacji, gdy początek ten leży na okręgu, wreszcie przypadek $e < 1$ (elipsa) odpowiada sytuacji rozpatrywanej powyżej w sposób czysto geometryczny.