Naturalna funkcja wykładnicza i liczba e

Pochodna funkcji wykładniczej

Obliczmy zgodnie z definicją pochodną funkcji $y = a^x$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot f(a).$$

$f(a)$ nie zależy od x, jest więc stałą określoną jedynie przez podstawę funkcji wykładniczej a. Przy $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca, nachylenie wzrasta wraz z wartością a. Możemy zdefiniować liczbę $a = e$, dla której spełniony jest warunek

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

W arkuszu eksponenta.xls można obliczać przybliżoną wartość tej granicy dla różnych wartości a. Łatwo się przekonać (wstawiając różne wartości a i obserwując wynik), że przybliżona wartość liczby e jest równa

$$e = 2,7183\ldots$$

Dla naturalnej funkcji wykładniczej mamy szczególnie prosty wzór na pochodną:

$$(e^x)' = e^x.$$

Funkcję tę oznacza się także w matematyce $\exp x$.

Różne wyrażenia na e

Twierdzenie 1 *Liczba e jest granicą ciągu*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Twierdzenie 2 *Jeśli przez $f(x)$ oznaczymy sumę następującego szeregu:*

$$f(x)x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

to $f(x) = e^x$.

Dowód twierdzenia 1
Z definicji e mamy

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Wprowadzając nową zmienną z określoną równaniem

$$\frac{1}{z} = e^h - 1$$

możemy napisać

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{1}{z \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z}.$$

Skorzystaliśmy tu z definicji logarytmu przy podstawie e (zwanego logarytmem naturalnym). Mianownik ostatniego ułamka dąży przy $h \to 0$ (co oznacza $z \to \infty$) do 1. Mamy więc

$$\lim_{z \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = 1 = \ln e.$$

Opuszczając logarytmy po obu stronach dostajemy żądany wynik.

Dowód twierdzenia 2

Szereg z tezy twierdzenia jest zbieżny i można go różniczkować wyraz po wyrazie, tak jak wielomian. Obliczmy pochodną funkcji $f(x)$:

$$f'(x) = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots = f(x).$$

Zatem pochodna funkcji $f(x)$ jest równa samej funkcji - tak jak w przypadku funkcji e^x. Ponadto $f(0) = 1 = e^0$. Istnieje tylko jedna funkcja $f(x)$ spełniająca oba te warunki.